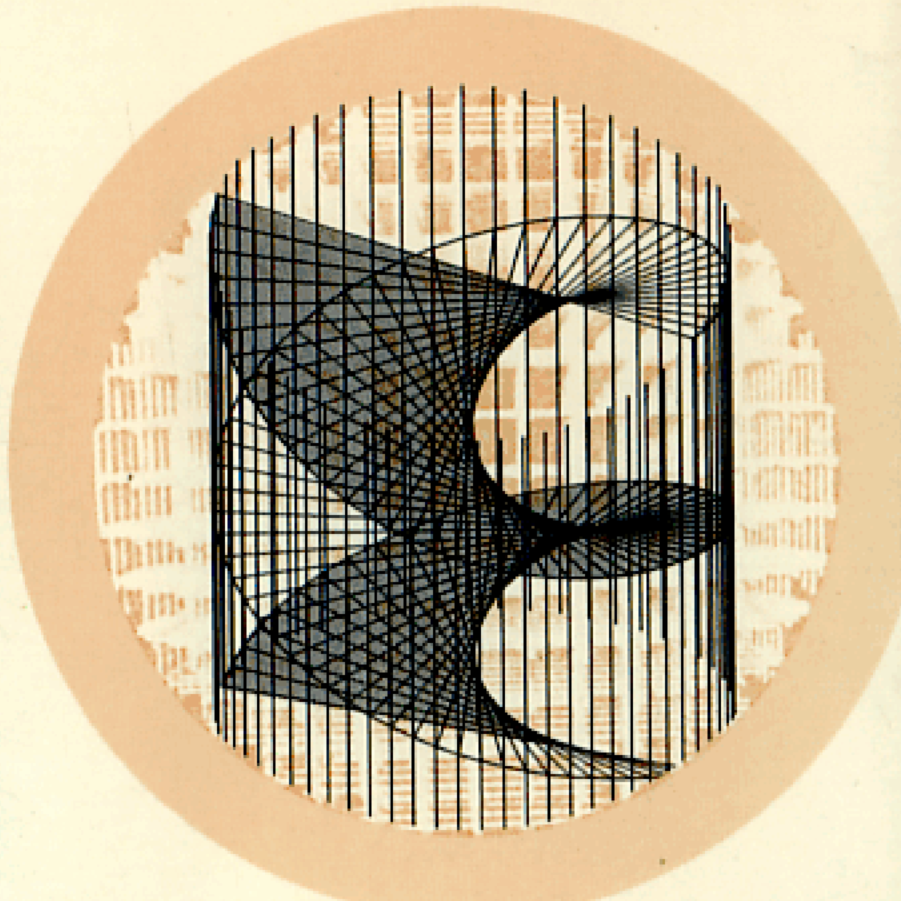
MONAD BOOKS

形の物理学

科学研究のあり方を考える

小川 泰著



海鳴社

MONAD BOOKS

形の物理学　科学研究のあり方を考える

小川 泰著

海鳴社

⑲

モナド・ブックス ⑲

小川 泰（筑波大学・物理学）

雪は天から送られてきた手紙（中谷）

ダイヤモンドは地底からの手紙（フランク）

生物界・非生物界を問わず、自然が織りなすさまざまな意匠には、自然界の秘密・情報が多く隠されている。しかし、定量化が困難なため、形の科学は寺田寅彦以後、等閑視されてきた。

だが現在、寺田物理学の時代とは、情況が大きく違っている。例えば、コンピュータの発達、ソリトン・フラクタル・ボロノイ多面体などの有効な概念の出現のほかに、非線型現象・非平衡系や形態形成への人びとの関心の高まり、そして図形情報活用の社会的な必要性などがそれである。

これらの情況をふまえ、総合科学としての形の研究を提唱・組織してきた著者は、本書で、科学をもっと広く、柔軟に追究すべきことを訴え、読者にこの分野への関心を呼びかける。（編集部）

定価515円
（本体500円）

MONAD BOOKS 19

形の物理学

——科学研究のあり方を考える——

小川　泰　著

海 鳴 社

目　次

著者：小川（おがわ）　泰（とおる）

発行：（株）海鳴社

〒101東京都千代田区西神田2-4-5
電話：（編）234-3643，（営）262-1967
印刷：文栄印刷　製本：細沼印刷製本所
出版社コード：1097　Printed in Japan
1983年10月31日第１刷発行©

まえがき

標題の「形の物理学」は、第四章に述べるように、京都大学基礎物理学研究所で開かれた研究会の名前である。数年来、著者は物理学という言葉を広く捉え、森羅万象に関わる形の問題を科学の立場で研究しようと訴えている。本書が呼びかける対象も、常識的な意味での物理学に関心ある方々だけではなく、あらゆる分野の研究者およびその卵達である。

第五章では、形研究の意義を述べ、物理論、科学論、文化論的意見を記す。偉そうなことを書いても、著者が一研究者として実際に解決できる事柄は限られている。芸術家が作品の説明をしないように、研究成果を通じて以外に、評論家的発言を慎みたい気持が著者にもあり、「形」などと主張しだすまでは黙ってきた。しかし、最近は、一種の研究者運動を組織し始めた以上、自分自身では解決できないと思うことでも、正論として主張すべきこと、指摘すべきことは、ためらわずに言ったり書いたりすべきだと思い始めている。実際の研究会は決して私見を押しつけるものではないし、一方自身の研究や研究会が、五章で述べるありうべき意義を実際には果せないとしても、必ずしも五章の指摘

自体の誤りとは限らない。本当に必要なのは、四章と五章の間に相当する問題、どう研究を進めてゆくかということなのは確かである。今は、人々の関心を高め、お互い同士の学問的刺激が何かを生み出すのを待つほかないと思っている。もちろん、形の問題としての個別テーマごとに協力関係を具体的に組織してゆく必要はある。

一章と二章には、本書の全体の構成上、いくつかの伏線を仕込んであるが、「形の魅力を素材とした一種の科学の試み」である。素材自体は科学の問題としては昔から判っていることである。筑波大学で全学、つまり理工系医系の学生だけではなく、文科系・芸術系・体育系も同時に対象とする総合科目「科学のなかの形」の講義の導入部として工夫したもので、大学初年生の知識を前提としている。それまで受けてきた教育によって、公式を絶対的なものとして憶えることが理科の勉強法だと心得たり、あるいは誤った印象のために数式や数学に嫌悪感をもつ学生たちの頭をやわらげ、科学のあり方について各自の立場で考えさせることがこの講義の目的である。広い意味での科学者、技術者の養成には系統的なカリキュラムが必要であるが、発想が固定化する弊もあり、それを補うものとして、この試みのような教育も有意義だと思っている。

講義のときにも同じ注意をするが、数式等をわずらわしいと感じる読者は、適当に飛ばして読み進んでいただきたい。本当に納得し、深く味わうためには、証明や数式が必要なことを実感してもらえれば大成功である。放物線―懸垂線―追跡線―カテノイド―ラセン坂道の関係は、私が発見したわけではないが、それらの間の美しい関係を納得した瞬間の私の感銘はかなり大きかった。汎用的な解析

幾何学的計算は、意味に気づかずに機械的に終了してしまう欠点がある。本書では、現在の教育では冷遇されているやり方、補助線をひき、相似や合同を確かめてゆく論証のほうを試みた。私にはそのほうが、形のもつ美しさ、魅力をよりよく満喫できるように思われる。

第三章は、今も私の研究テーマの一つである液体構造、アモルファス構造の話である。ここでは、流動性などにはまったくふれていないので、液体像としては偏ったものであるが、「形の研究」を主張する私の、一研究者としての不完全な自己紹介だと思っていただきたい。当然私のいう「形の物理学」に含まれるものだとは思っているが、決してその典型だとは思わない。

錘りやコルセットをつけてキウリを真直ぐにするなどの、いわゆる規格野菜は、流通の合理化を通じてコストを下げる役割はあるのかもしれない。しかし、整形に過大の労力を割くのは正常ではないと思う。社会との関わりの中で、形の科学研究の進展が、現実にどう作用するのかは何ともいえない。機器による形の検知や認識が、軍事的意義をもちうることも否定できない。現代における科学の問題として、社会との関わり方の問題が間違いなく存在している。形の科学もこのことに目を瞑っているわけにはゆかない。しかし本書で論じたいことは、科学自身の、あるいは科学の内面の問題である。

本書では第四章に、研究会のプログラム等を掲げたが、討論の成果等についてはほとんどふれておらず、別の機会に譲りたい。今までの会や、今後の計画に関心のある方は著者に御連絡頂きたい。

最後に、研究会に御協力下さったすべての方々に感謝致します。また、第三章のVD解析の共同研究者、種村正美博士（統数研）、荻田直史博士（理研）に日頃の討論を感謝致します。

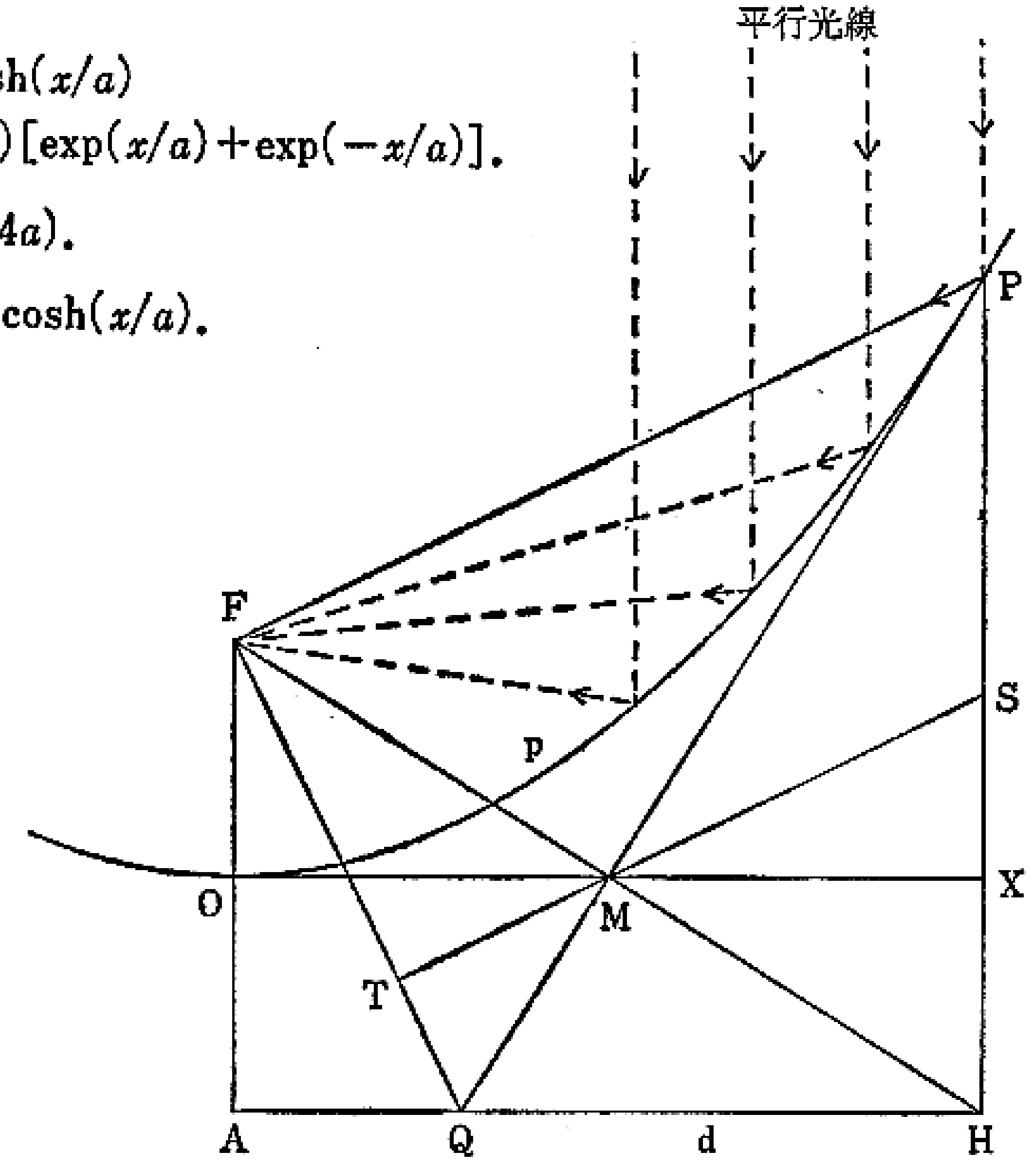
第一章　懸垂線の数理と物理

理想化した紐

自然が生みだす素性のはっきりした形の代表として懸垂線をとりあげ、いろいろな現象や事柄を一つのつながりで眺めてみよう。懸垂線は、電線、くさり、物干の紐、首飾り等々、広い意味での紐に重力が作用して作る形の理想形である。理想形と書いたのは、「伸び縮みを無視できる、一様でしなやかな紐」という模型化を指している。複雑な二次的要素を取り除いて一歩先まで認識を深め、基本的な描像を作る。その結果、無視した二次的要素の影響をも整理することができるようになり、全体の系統的な理解が可能になる。このようにはかどれば、理想的であるが、理想化は科学の、特に物理学のような数理的科学の常套手段である。このように理想化した模型には、必ず、限界のあることも心しておく必要がある。

(1)　$y=a\cosh(x/a)$
$$=(a/2)[\exp(x/a)+\exp(-x/a)].$$
(2)　$y=x^2/(4a)$.

(3)　$(y/a)=\cosh(x/a)$.

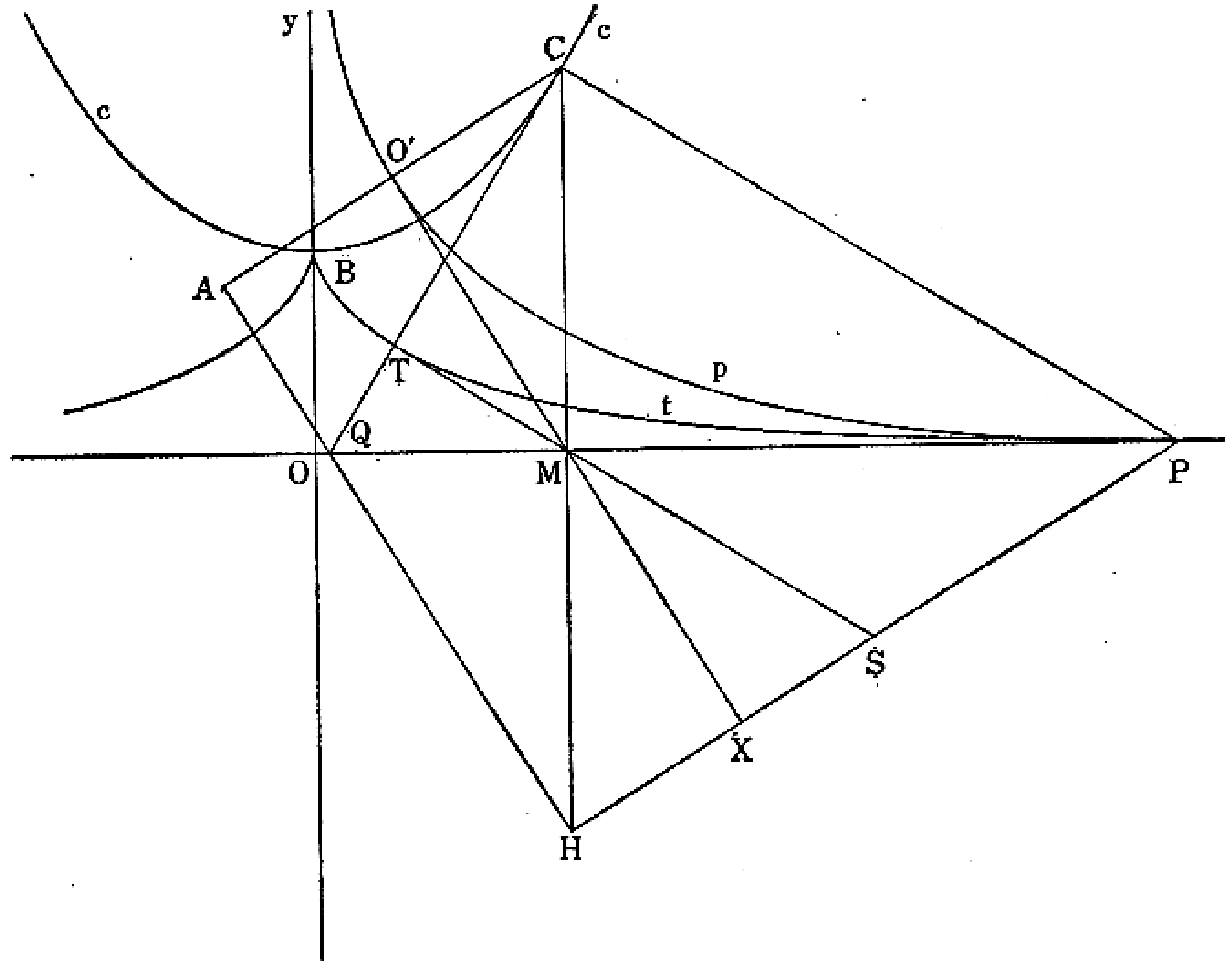


第1図　放物線の性質．

懸垂線の形

さて、懸垂線は(1)式の数式で表わされる。原点の位置と、aの値を調節すれば、紐の長さと両端の位置について、与えられた条件をみたすようにできる。懸垂線は放物線(2)式と密接な関係がある。

第1図の放物線pを次のように定義する。焦点Fと呼ばれる定点（0, a）と、準線dと呼ばれる定直線$y=-a$があり、「Fまでの距離とdまでの距離が一致する点Pの軌跡」が放物線である。放物線には、準線に垂直な平行光線を焦点Fに完全に集光するなど、美しい性質があるが、懸垂線との関わりで重要な関係、MT＝a（第1図）を確認しておきたい。



第2図　放物線(p)，懸垂線(c)，追跡線(t)．$\widehat{BC}=\overline{TC}$，$\widehat{O'P}=\overline{OP}$．

まず、Fからdへの垂線の足をAとし、FAの中点をOとしておく。放物線上の点Pから直線dへの垂線の足をHとすればPF＝PHである。∠FPHの二等分線とdの交点をQとする。（FとHはPQに関して対称）。FとHを結ぶとその中点MはPQ上にある。OM∥dであるから∠FMO＝∠FHQ＝∠HFQである。MからFQへの垂線の足をTとするとOM⊥FOであるから、FMを共有する△FMTと△MFOは合同である。だからMT＝FO＝aである。

なお、直線PQはP点における接線になっている。

今、放物線（第2図の(p)）が、x

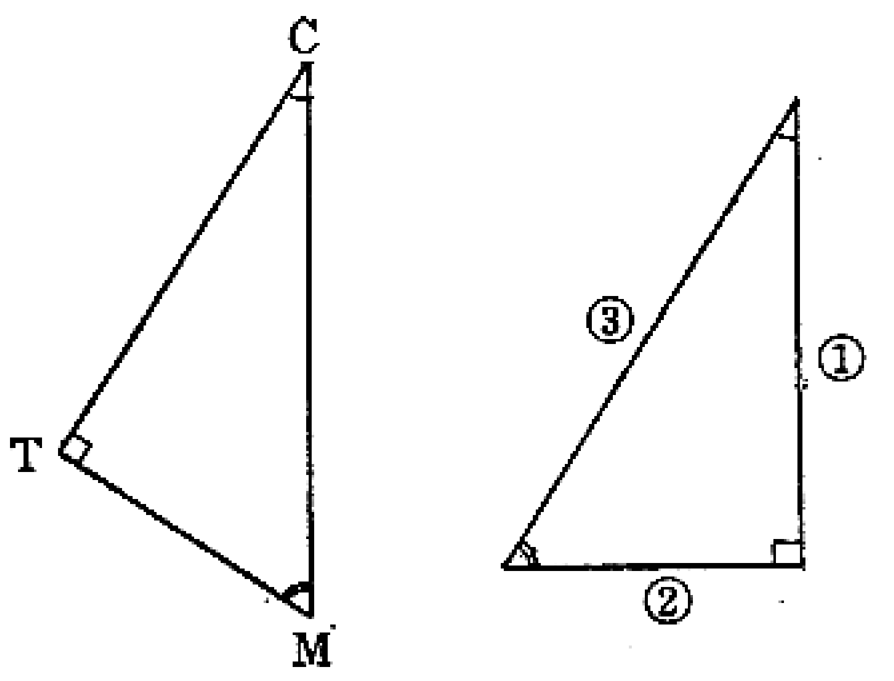
軸上を正の方向に、平地を行く車輪のように滑らずに回転させるものとする。そのときに点F（図ではCに相当）が描く軌跡が、ちょうど(1)式の懸垂線（図の曲線(c)）になっている。円を転がしたときの円周上の一点の軌跡であるサイクロイドのような曲線をルーレットというが、懸垂線は、x軸を底線、放物線を転曲線とし、焦点を極とするルーレットである。

このとき、T点の描く軌跡は追跡線（図の曲線(t)）と呼ばれる。点Tは、x軸上を進む点Mを、常に距離aに保ちながら追跡していることは、線分$\overline{TM}=a$が(t)の接線であることからいえる。懸垂線の頂点をBとし、(c)に沿って測ったBからCまでの長さを$\overset{\frown}{BC}$とする。懸垂線(c)に巻きつけられた糸をBからほどいてCQ上に伸ばしたとき、BがT′の位置に来たとする。線分$\overline{T'C}=\overset{\frown}{BC}$がC点における曲線の接線(c)になっていて、T′における曲線$\overset{\frown}{BT'}$の接線と線分$\overline{CT'}$が直交する。C点が糸の先端の瞬間的円運動の中心（曲率の中心）であるから、CQ⊥MT′となり、T′が実はTのことであることが判る。(t)を(c)の伸開線、(c)を(t)の縮閉線という。次項の理解に役立つので、三曲線(p)(c)(t)の間の関係を理解しておいてほしい。

力のつりあい

理想化した紐に外部から働く力は、紐の各部分で鉛直下方に向う重力だけである。紐のある部分に着目すると、両側から受ける張力が、その部分の長さに比例する重力とつりあって、落下を妨げるとともに、水平に移動することもないようにしている。隣接部分からの力が、それぞれの接点における

接線方向の張力になっているということが、「理想的なしなやかさ」の内容である。もし、これに直交する方向の力があれば、紐はその力に従って移動してしまい、つりあい状態ではそのような力は残らず、接線方向の張力だけである。静電気学での理想的な金属（導体）では、もし電場があれば電荷が瞬時に移動して、電場が残らないような電荷分布を作ってしまうので、完全導体中には静電場は存在しない。紐の場合も同様な理想化といってよい。いいかえると、第2図でC点に働く力は、最下点BからC点までの紐の重力①が鉛直下方に、最下点での張力に等しい一定の力②が水平方向に、これら二力の合力③は、C点での接線方向を向く張力になっている。①②③は、③を斜辺とする直角三角形を形成するが、△CTMは$\overline{CT}=\overset{\frown}{BC}$を鉛直に、$\overline{TM}=a$を水平に、$\overline{CM}$を接線方向に向けると、それぞれ①②③に相当して、三力のつりあいを示している。（第3図）



第3図　三力のつり合い．

力学の問題として本当に解くには、張力の方向と大きさは未知のまま、各部分のつりあいの式をたてる。これを微分方程式の形にして解けば、懸垂線の一般式が得られる。たいていの力学演習書に出ているので、詳しくは述べない。ここでは解き方よりも、物の考え方を問題にしたい。できることなら楽しみながら――。

夏目漱石の『吾輩は猫である』に「首縊りの力学」の話がある。当時の英国の物理学専門誌に載っていた論文を寺田寅彦から教わり、

とり入れたらしい。一二人の侍女を、一本の縄に「提燈玉(ちょうちんだま)」式に等間隔に吊り、同時に絞殺する、というホメロスのオデュッセウスの話である。『猫』にも寒月先生の理学協会演説のおさらいで数式が出てくるが、対称性を考慮して、半数の六点に対してつりあいの式を立てる。水平方向と鉛直方向があるので、一二元連立方程式を得る。これらは隣接部分の張力の間の関係式である。この場合には縄の質量は無視し、重力は一二人にだけ働くとしているが、間隔を限りなく狭め、無限の大量殺戮にした極限が懸垂線の問題である。逆に、紐の質量をところどころに集中させてしまった首縊り問題は、当世風にいえば、懸垂線問題の微分方程式を差分方程式に変換したものである。計算機による微分方程式の数値解法は、このように、十分に多いが無限個ではない変数の連立方程式を力づくで解き、微分方程式の解を推定する基にしよう、ということである。

変分原理

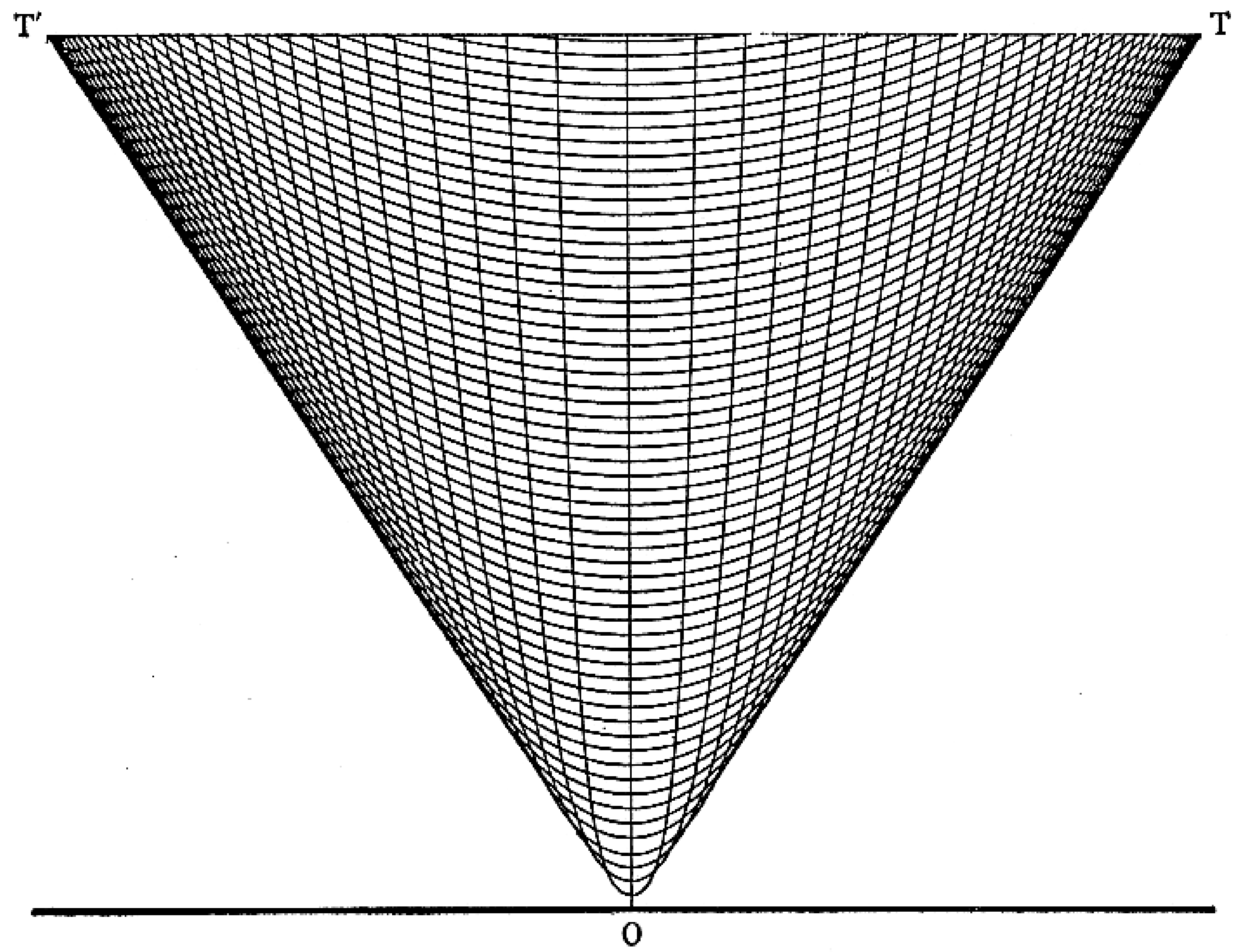
懸垂線の問題に限らず、つりあいの問題一般についてエレガントな考え方がある。微小に状況を変化させたときに、系全体の位置エネルギーがどう変化するかを考える。実際に変化させる必要はなく、頭の中で想像してみるだけでよい。もし、どう変化させても、位置エネルギーが全体として増すならば、どんな変化に対しても復元力が働くことになり、それは安定なつりあいといえる。ある変化に対してエネルギーが減れば、変化は助長されてしまう。机を一本足で立たせることも、うまくバランスをとれば不可能とはいえないが、倒れ始めたら復元力が働かないため、不安定なつりあいである。い

ずれにしても、つりあいの場合は、位置エネルギーの極値に対応している。懸垂線は、紐の長さと、両端の位置を指定したときに、あらゆる形の中で位置エネルギーが最小になっている形である。このように、極値問題として基本法則を表現したものを変分原理という。前項の力のつりあいによる考え方では、各所で成立する式を立てる。いわば局所的な見方に基づいている。変分原理の見方では、系全体の位置エネルギーを問題にし、いわば大域的な見方に基づいている。

反射・屈折等、光の径路についてのフェルマーの原理では、光は径路に屈折率の重みをつけて定義した光学距離を極値にするような径路を選んで通る、と主張する。運動を論じる動力学でも、またミクロの世界を支配する量子力学、ミクロとマクロを結ぶ統計力学、電磁気学や相対論でも、変分原理によって基本法則が表現される。第二章のシャボン膜の形の問題では、変分原理の威力が発揮される。

相似性

aの値が小さいとき、懸垂線は横にピンと張り、aが大きいと長く垂れ下がる。だからaの値によっていろいろの形がありそうに見える。しかし、無限の変域でみる限り懸垂線の「形」はただ一つしかない。(1)式の両辺をaで割って、(3)式の形にすれば直ちに判るように、aを単位にして測ったxとyの間には、aの値にはよらないただ一つの関係が存在するだけである。半径の違う円がすべて互いに相似であり、「形」としてはただ一つの円しかないことと同様である。すべての懸垂線は互いに相似である。「ピンと横に張った」と見えたものは、実は先端部分だけを拡大して見たものであり、「長



第4図　懸垂線の形は一つ．

く垂れ下がった」と見えたものは、広い範囲を縮小して一目で見ていたようなものである。さまざまなaの値に対する懸垂線を描いた第4図から判るように、(1)式の表現では原点が相似の中心になっている。この図では、原点を通る二直線OTとOT'を境にして、懸垂線の存在する領域と、懸垂線がない領域に分かれている。存在する領域内の各点には、aの異る二本の懸垂線が通っている。二直線OTとOT'はaのどの値にも共通な、接線になっており、その勾配の絶対値は、一・五〇八九である。($\lambda=\coth\lambda$ の根 $\lambda=1.1997$ を使って、$\mathrm{sh}\,\lambda$ で表わされる。)

第二章　シャボン膜の形(1〜3)

表面張力とシャボン玉

分子間に引力が働くと、充分低温では分子が集って液体になる。分子数が有限ならば表面ができる。内部の分子は、あらゆる方向の隣接分子に引っぱられているのに対して、表面の分子は内側からしか引かれていない。そこで、幾何学的に許される範囲で、できるだけ表面分子の数を減らして内部にとり込むようになる。このように表面をできるだけ小さくしようという傾向が表面張力である。表面分子が隣りの表面分子から受ける力は、逆隣りの表面分子からの力と、平均としてつりあっている。これは、あくまでもつりあっているのであって、力が働かないのとは違う。表面上の任意の場所に、任意の方向の単位長さの線分を想定すると、物質の種類と温度にはよるが、線分の選び方にはよらない力が、線分をはさむ両側から線分を直角方向に引っぱってつりあっている。空気中に浮いた完全に球形の水滴の場合、表面上にある微小部分を考えると、その縁に働く表面張力の合力は、球の内部に向っている。シャボン玉では、薄膜で仕切られた内側の球形空間部分に空気がつまっているが、やはり

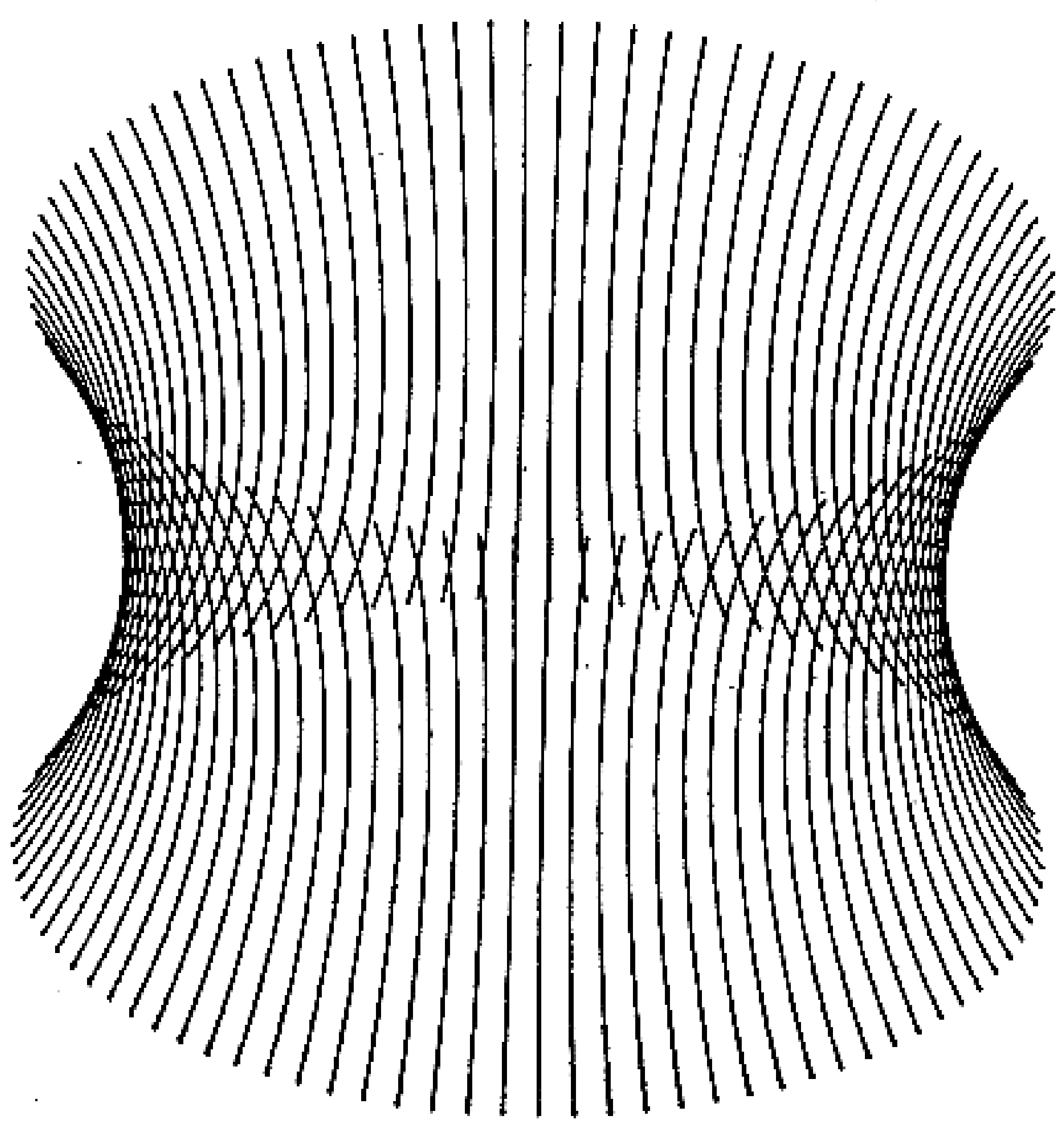
表面張力の総和は内部を向いている。（但し、シャボン玉では、外側と内側の二つの表面があると考えるべきである。）このため、内側の空気の圧力は外側の大気圧よりも高い。内外の圧力差は、湾曲度の強い半径の小さい玉ほど激しい。一般の曲面では主曲率の相加平均に相当する平均曲率に比例している（二三頁で説明）。このことは、管の両端に大きさの違うシャボン玉をつけて、中の空気が移動できるようにしたときに、小さい玉から大きい玉に向って空気が流れることによって確かめることができる。シャボン玉の代りに、ゴム風船で似たことをやれば、大きい玉から小さい玉に空気が流れて、双方とも中間の大きさになる。ゴムは伸びているほど張力が大きいためであり、膜の厚さによらない表面張力の場合とは異る。

閉じていないシャボン膜

曲面は、球面のように、裏と表の両面の凹凸がはっきりと違うものだけではない。鞍形のように面のどちらの側にも反っていて、裏表をいい難いものもある。峠付近の地形にたとえるならば、尾根伝いの線に沿う反り方は、表面張力の合力を上方に向けるが、山道に沿っての反り方は、下に向けようとする。もし、これらの二つの傾向が拮抗すれば、曲面の両側に圧力差はない。

針金で同じ半径の輪を二つ作り、柄をつけて支える。二つの輪を重ね合わせてシャボン液を塗り、二つの輪を平行に保ちながら中心軸に沿って離して行く。離れるにつれて、二つの輪をつなぐシャボン膜ができる。その形は、間隔がわずかならばほぼ円柱状であるが、さらに離して行くと、中程が次

第にくびれて、第5図のような鼓形になる。この場合、シャボン玉とは違って空気はすべて一つながりであるから、膜の両側に圧力差はなく、まさに、今述べたような状況になっている。膜の形を調べると、輪に平行な断面は円だから、力は内側に向い、中心軸を含む平面による断面は中くびれだから、力は外側を向いている。ちょうどこれらがつりあったとき、圧力差が解消するはずである。つりあいは一番くびれた中央部だけでなく、輪に近く、平らに近い部分でも、到る所裏表の区別をつけられない反り方になっているはずである。



第5図　カテノイド.

変分原理の威力

この面の形は数式で表現できるだろうか？　実は簡単にできる。この場合、力のつりあいを考えるよりも、与えられた条件下で表面積最小という考えのほうが楽である。表面張力ができるだけ表面積を小さくさせようとしていることを思い出していただきたい。問題の対称性を考慮すると、輪に平行な断面は円であるから、どんな曲線を回転させてできる曲面であるかを決めればよい。回転面の面積は、

半径を曲線に沿って積分したものに比例するから、「半径」が「高さ」の役割を演じれば、前章で懸垂線を変分原理で導いたのと同じであることが判る。この曲面は、(1)式の懸垂線を、x軸を軸にして回転したもので、カテノイドと呼ばれる。

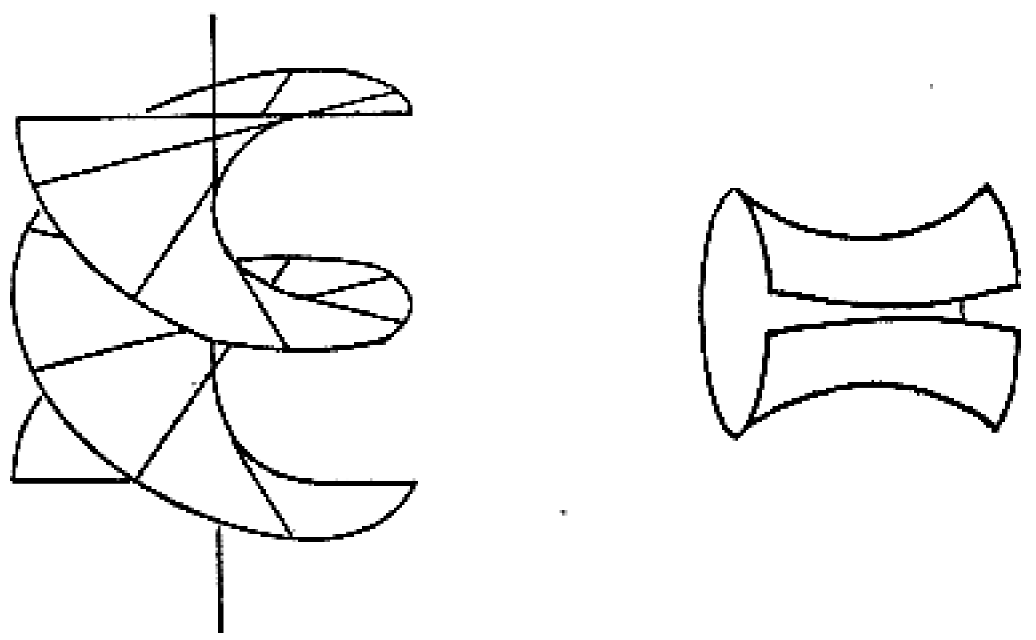
実をいうと、二つの変分問題はまったく同じなのではない。懸垂線では、紐の長さは与えられているが、高さをどこから測るかについては自由度がある。一方、カテノイドの場合、回転軸は決まっているが、回転する曲線の長さは、結果として決まるものであって、あらかじめ与えられているものではない。この相違にもかかわらず、(1)式のようにとったものは両者に共通の答えになっている。

紐の長さと、その両端の相対位置が与えられたとき、どの懸垂線が選ばれるのか、輪の半径と距離が与えられたときの曲面は、どの懸垂線を回転させたものか？　膜の厚さがいくら薄くてもかまわないとしたら、いくらでも輪を離して行くことができるだろうか？　結論は読者にお任せする。カテノイドの局所的な反り具合は、本当に裏表同じか、ということも考えていただきたい。一番くびれている所以外では回転半径と、面の曲率半径とが一致していないことを注意しておく。

カテノイドと曲率

平面上では、半径rの円の周の長さは周知のように$2\pi r$である。地球の半径をRとしたとき、北極からrの経線にそった距離（＝測地線の長さ）内にある点の集合は、緯度の値が一定値であり、一つの円周に対応するが、その長さは$2\pi R\sin(r/R)$であって、平面（$R\to\infty$）の場合の$2\pi r$よりも短い。

地球の二本の経線間の距離は赤道上で最大で、両極で0になっている。凸レンズ形の紙片を貼り合わせて、球形の紙風船ができることを思ってほしい。紙風船のように貼り合わせてカテノイドを作るには、双曲線の縁をもった凹レンズ形の紙片を用意せねばならない。この曲面上ではどこでも、任意の半径r（曲面に添った長さ）の円周の長さは、$2\pi r$よりも長い（球面では逆に短い）。しばしばこのような性質をもつ曲面を、負の曲率（球面では正の曲率）の曲面という。その場合の曲率の意味については、二二三頁で述べる。



第6図　すだれのらせん坂道(左)。

さて、凹レンズ形の紙片を貼り合わせてゆき、最後に閉じさせて完成というところで、ちょっと手を休め、調べてみよう。当然のことながら、貼り合わせたものは平面ではないから、自然に反り返ってくるが、できるだけ各凹レンズ紙片の貼り合せ部分がまっすぐになるように、ひねりを与えてゆくとどうなるだろうか？　理想的に作れば、ラセン階段ならぬラセン坂道とでも呼ぶべき曲面になる（第6図）。但し、ラセンの中心軸の向う側にもう一つの別の坂道があり、いわば、昇り専用と下り専用が互い違いになっている。もし何層も続けば床屋の白地に赤青まだらの円柱看板のようである。スダレをちょっと改造し、棒はたわめずに真直にしたまま全体をひねっても、このようなラセン坂道ができる。ひ

ねらずに棒のほうを懸垂線状にしなわせて閉じさせれば、カテノイドになるという趣向である。このように、カテノイドとラセン坂道とは、ある意味で、同じ物の別の姿である。まさに南京たますだれのように姿を変える。

意味ある形

カテノイドをはじめ、シャボン膜の作る形は、与えられた条件下で面積を最小にしているので、自重を無視できるような建造物に適用すれば、材料を節約できる形である。また、一定値の表面張力によってできる形であることを思い起すならば、各部分にまったく一定の張力が働いていることがわかる。言い換えると、シャボン膜でできる形では、負荷のかかり方にむらがなく、どこにも集中しないとともに、どこも遊んでいないことになる。その意味でも、シャボン膜の形は経済的な構造を与えていることがわかる。

一般的にいって、われわれは、原理的機能的な意味のある簡単な形に美を感じることが多い。富士山の形としての美しさは、何らかの意味での無駄のなさであろう。何か簡単な原理に基づいて説明できそうな感じを与える。どのような意味で無駄がなく、理に叶っているのかが判れば、形のもつ意味が理解できたことになる。坪田張二氏の解析[4]によれば、富士山の形はカテノイドで非常によく表現できるとのことである。二次的要因は除いて、地形形成に重要なわずかな事柄だけを考慮し、いろいろな理想地形というものを導いてみることも可能であろう。富士山の形も、何らかの意味での理想

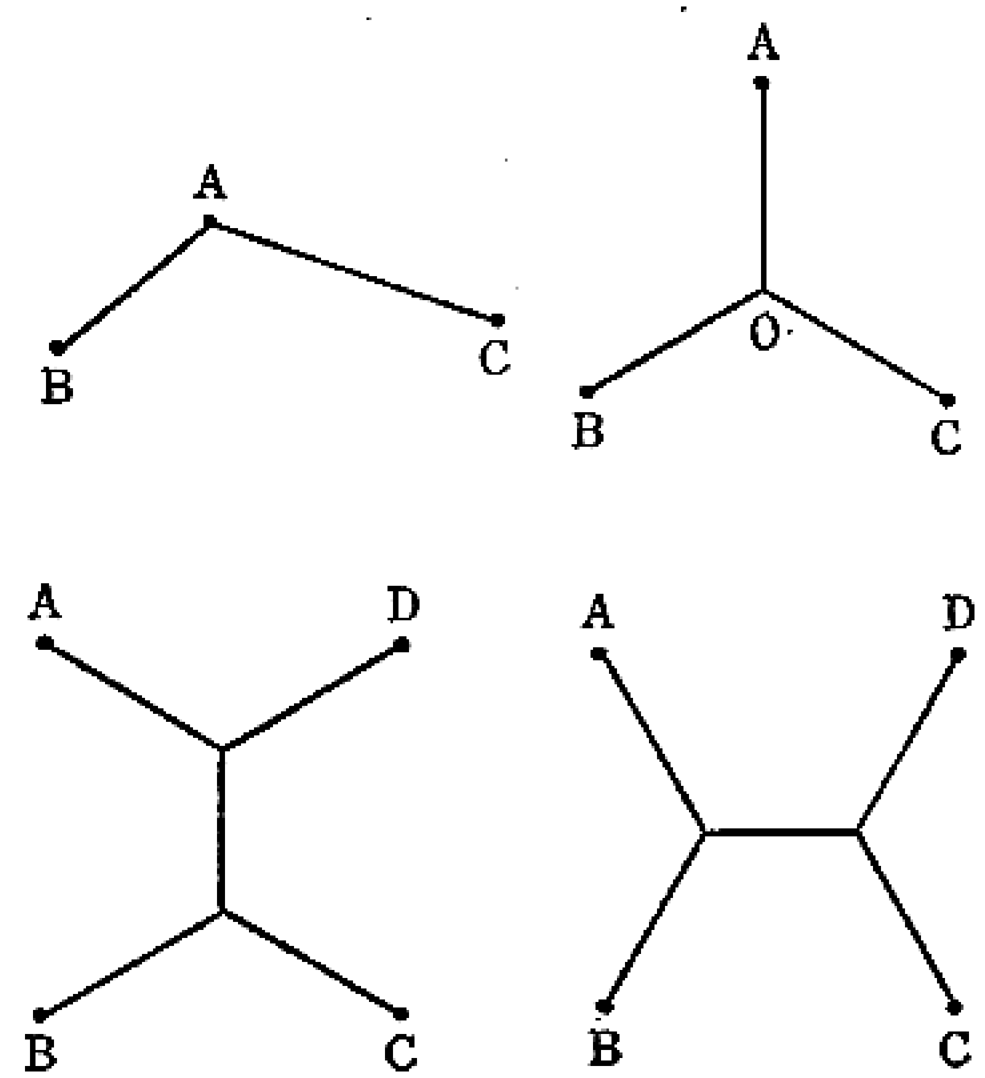
地形に近いものと考えられる。

いろいろな曲率

平面曲線とその接線は、接点で微分係数が一致するが、二次微分係数まで一致する円が、最良接触円である。その半径が曲率半径、曲率半径の逆数が平面曲線の曲率である。曲線の曲率は各点で一種類だけだが、曲面や空間の曲率と呼ばれるものは一種類ではない（一八、二一頁参照）。

表面張力の話に現れる曲面の曲率は、三次元空間の中での姿に関連した曲率であり、平均曲率とも呼ばれる。一方、この曲面内の世界自身に固有の性質、つまりカテノイドからラセン坂道に姿を変えても変らない性質としての曲率＝全曲率がある。カテノイドについて負の曲率といったのは全曲率についてであり、裏表の反り具合が同じであることに対応して平均曲率は0である。姿を変えたラセン坂道では、全曲率は変らないが、平均曲率は変る。平面はどの曲率も0である。巻いて円筒の姿にすれば、全曲率と母線方向の曲率は0であるが、円形の断面はもちろん曲率をもっているから平均曲率は値がある。相対論的な宇宙論などで曲率と呼ぶのは全曲率である。

全曲率と平均曲率は無縁ではない。峠の地形でいえば、尾根方向の稜線と山道の、二つの曲線の曲率を、それぞれ主曲率という。もし、それらの最良接触円の中心が、曲面に関して別の側にあれば符号は違えておく。このように符号の約束をした上で、二つの主曲率の算術平均が平均曲率、積が全曲率である。



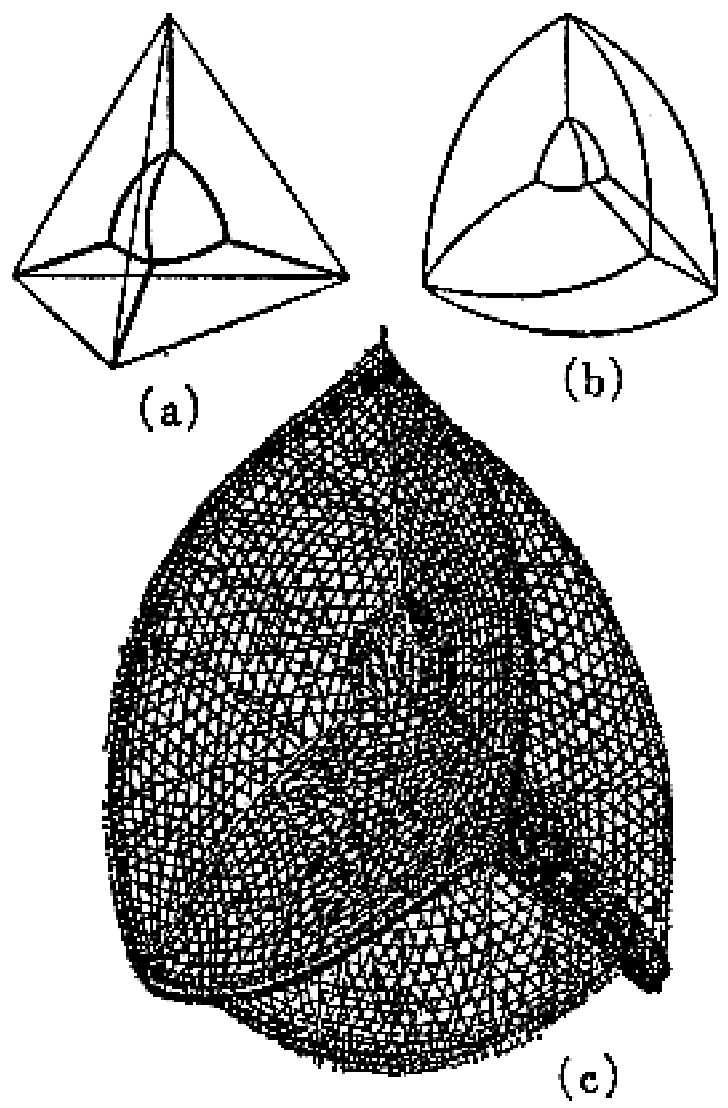
第７図　道のつけ方.

プラトー問題

同じ強さの三チームが同時に、端が三つある綱で綱引きをしたと考えよう。二チームが結託すれば勝負がついてしまう。三つの同じ大きさの力がつりあうのは、互いに一二〇度の角度をなしているときだけである。表面張力が到る所一定であることを考えると、三つのシャボン膜が出会ってつりあっているときには、互いに一二〇度をなしているはずである。膜が平面ではなく、どんな曲面をしていようと、また膜と膜の交わりが、どんな曲線になっていようと、面と面の交わりの角は一二〇度である。面と面の交わりの線の始点と終点では、六つの面、四つの交線が会している。ここでの交線と交線のなす角は約一〇九度、正確には$\cos^{-1}(-1/3)$である。

ＡＢＣ三都市を結ぶ道路を設け、その総延長をできるだけ短くしようとすれば、シャボン膜の交わりと同じく、第７図のように$\angle AOB=\angle BOC=\angle COA=120^\circ$になるＯ点を交点としてＡＯ、ＢＯ、ＣＯを直線で結べばよい。但し、△ＡＢＣが一二〇度以上の角をもつ鈍角三角形の場合には、その鈍角に相当する都市を中継地として折れ曲る二直線道がその解である。

正方形の四頂点に配置したＡＢＣＤ四都市の場合、ＡとＢ、およびＣとＤをそれぞれ結び、その間に連絡をつける方法と、ＡとＤ、およびＢとＣをまず結ぶ方法の同等な二方法がある。もちろん、いずれの場合も分岐点は一二〇度の三叉になる。同様にシャボン膜の場合にも複数の同等な解をもつことがある。立方体の一二本の陵に相当する枠を作り、シャボン液につけて引き上げる。このとき、引き上げる向きによって三つの可能性のいずれかが選ばれて実現する。自然現象の舞台としての空間自身が生来もっている対称性を、登場者が協力して破ってしまい、系の対称性が自発的に低下してしまう相転移現象とも一脈通じるところがある。シャボン玉遊びにもいろいろな楽しみ方がある。



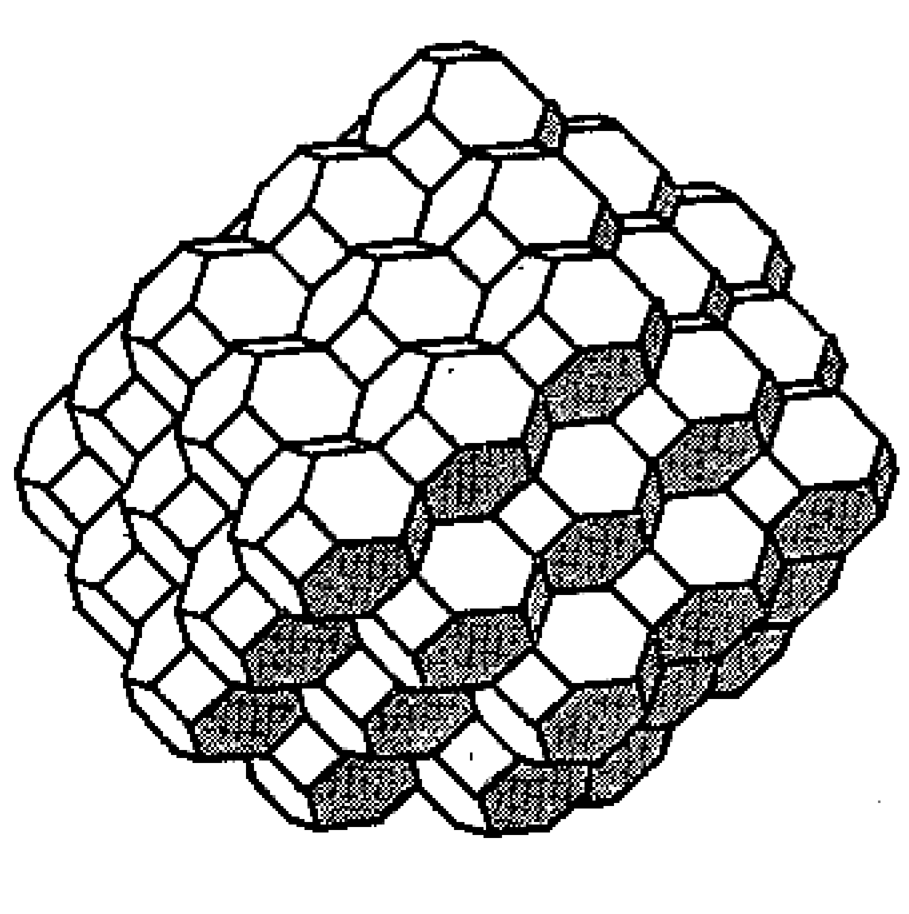
第８図　放散虫カリミトラの骨格とシャボン膜の形.（ａ）：四面体の６つの陵の枠にシャボン膜を張り，中央に泡を１つ入れた形.（ｂ）：（ａ）の泡の陵を枠にして同じように泡を１つ入れたときの形.（ｃ）：放散虫カリミトラの骨格全体は（ｂ）の形と非常によく似ている.

一般に、与えられた空間曲線を縁とする最小表面積の曲面を求める問題をプラトー問題という。プラトーは一九世紀のベルギーの科学者であるが、眼の残像効果を調べるために一二〇秒間太陽を凝視したため、視力が衰え、やがて失明した。

彼の名を冠せられている極小曲面問題を研究したのは失明後のことであった。

いろいろな形の空間曲線の枠を作り、シャボン膜を作ってみる。結び目のように閉じていない曲線でもよい。また、内部に閉じたシャボン玉を入れてもよい。このようにして作ったシャボン膜の交線の形のうち、いくつかのものは化石として残る放散虫の外骨格の形として実現している(5)。

また蜂の巣は、材料を経済的に使う巣作りになっており、平面を等面積の部分に分割する場合の境界最小の原理に基づいた規則的構造である。蜂の巣格子と呼ばれている。三次元空間を同体積の細胞に分割したとき、境界面積が最小になるのは、体心立方格子状に細胞が配置した場合である。この時、各細胞は一四個の隣接細胞をもち、その面は曲面であるが、平面と考えて多面体とみなせば、六つの正方形面と八つの正六角形面をもつ一四面体（ケルビン一四面体）である。（第9図）等大石鹸泡の集合はこれに近い構造をとる。言い換えると、結晶的に規則配置できる細胞の形の中で、最も球に近い形をしているのがこの一四面体である。ヘリウムは、原子が軽く、量子効果が大きいために、最も結晶化しにくい物質である。絶対零度でも、三〇気圧ほど加圧してやっと結晶化するが、このときの構造が体心立方格子である。



第9図　ケルビン14面体による空間分割.

第三章　点配置の特徴

気相・液相・固相(6)

すべての物質は、気相・液相・固相の三相をとる。固相はさらにいろいろな構造に細分できる。気体には、相互作用がまったくない質点の集りとみなす理想気体模型があり、それを基にして主に量的な補正を加えることで、実在気体を理解できる。近代原子論の形成も、理想気体概念と無縁に考えることはできない。

一方、固体には、完全に周期的な規則配置と、調和的な格子振動という理想模型がある。この描像は、量子論の確立や、さらにそれを通じてエレクトロニクス発展の基礎となっている。

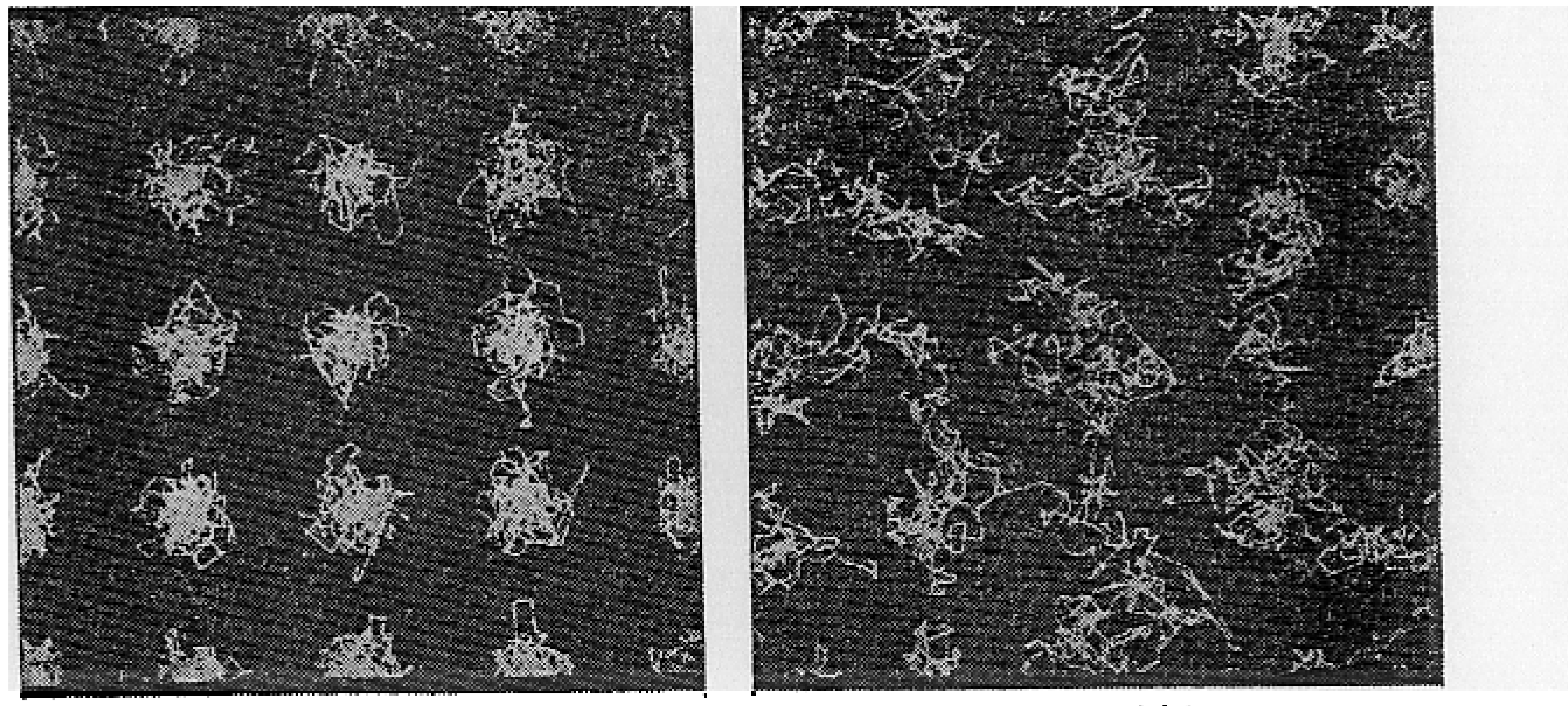
さて、気体と固体の中間に相当する液体については、前二者ほどに確立した理想模型はない。結晶とほぼ同じくらいに分子が混みあった密度をしていながら、はっきりとした秩序はなく、さりとて気体ほどに自由に飛び交っているわけではなく、秩序のとらえどころがない。ある分子の存在が、他の場所における分子の存在確率に与える影響は、二体相関関数や、構造因子という量で理論にとり入れ

るのが、よく使われる液体理論である。これらの量はX線回析等で観測可能な重要な量ではあるが、構造については、立体的な特徴はおろか、平面的な特徴も充分にはとり入れられていない。

いかに小さかろうと、粒子が有限の大きさをもつ以上、密度の上限として満員状態があるが、理想気体をちょっと修正したような見方で満員現象を理解することは難しい。液体中の分子配置を記述する、あるいはもっと一般的に、空間内の点配置を特徴づける方法はないであろうか。これがこの章のテーマであるが、立ち入る前に基礎物理学の立場で、満員現象としての結晶化について述べておこう。

満員現象としての結晶化

第二章でもちょっとふれたが、気体から分子が寄り集まって液体に凝集するには、引力の存在が必須である。しかし、すでに凝集して高密度になっている液体から、規則正しい分子配置の結晶への構造変化にとっては、引力は本質ではない。分子に大きさがあるための満員現象とみるべきであり、その意味ではむしろ、斥力が重要である。二分子だけの場合の安定な分子間距離は、二体力が引力から斥力に変り、ポテンシャル・エネルギーが最小になる距離a。三分子、四分子ならば正三角形、正四面体の頂点に分子をおいて、すべての分子間距離をaにできる。しかし、三次元空間のもつ制約として、五分子以上ではすべての分子対の距離をaにすることはできない。分子が接近しすぎるときのポテンシャル・エネルギー損失に比べれば、引力による得は微々たるものである。最も安定な分子配置を考える際に、接近しすぎないことを最優先すべきであり、液体と結晶の区別を論じる際には、引力



(i)結晶相　(ii)流動相

第10図　アルダーの剛体球相転移。

よりも斥力が重要だというのは、この意味である。最も単純化するならば、パチンコ玉を理想化したような剛体球系である。分子が接近できるのは直径距離までであり、他にはいっさい相互作用はないとする。引力がないので凝集は起らず、液体と気体の区別はないが、密度を一定値に保つとして、その値がある値を越えると結晶状態のほうが安定になるならば、液体から結晶への凝固に相当すると考えられる。

一九五八年、計算機実験によってこのことを最初に示したアルダー（Alder）[7]に因み、斥力だけの系の結晶化をアルダー転移という。アルダー以前に、剛体球系の結晶化転移を確信していた物理学者はほとんどいなかったが、現在では結晶化転移の理想描像を与えるものと考えられている。粒径のそろった合成樹脂微小球が水中に分散した単分散ラテックス系は一種のコロイド系であるが、引力は本質的ではなく、本質的にはアルダー転移とみなせる現象が見られる[8]。この系の粒子の動きは、実際に顕微鏡で観察

でき、フィルムやビデオに記録できる。結晶中での分子の周期的配置を物語るブラッグ反射の現象は、通常の結晶では波長が分子間距離に相当するX線に対して起るが、この系では可視光に相当し、鮮かな虹彩を示す。

何故液体と結晶という二つの存在様式があるのかについて、簡単な直観的説明を与えることは難しいが、たとえ話として積木を箱にしまうことを考えてみよう。積木の分量に比べて箱が十分大きければ、手当り次第に放り込んでも入り切るが、ある程度以上密につめ込もうとすればこれでは済まず、意識的に整理し、規則正しい入れ方をしないと無理である。

液体中の分子は気体中におけるほど自由に動きまわれないが、旅を禁じられているわけではない。瞬間的にみれば各分子の環境には貧富の差があるが、その差は固定されたものではなく、長い時間のうちにはどの分子にもチャンスが巡ってくると期待できる。その意味で、時間平均については平等である。一方、結晶中の分子は強い統制下にあり、動き回ることはできないが、その代り、どの分子もある程度の空間を平等に保証されている。高密度になり、一粒子当りの空間が狭くなると統制は避けられない。しかし、この場合、外部から統制されるのではなく、自発的に秩序を組むのである。

ある道の片側が路上駐車（パーキング）を許されているとしよう。各自がまったく無作為に空所に駐車した場合、等間隔にできるだけたくさん駐車した場合の〇・七八四八で満車になってしまう。一次元の場合についてレーニイが厳密に解いたこの問題は、ランダム充塡（パッキング）の問題と呼ぶ。二次元、三次元では厳密解はないが、計算機実験により、それぞれ、〇・六〇四、〇・五一六が求ま

っている。

結晶化は、ポテンシャル・エネルギーの増大を防ぐ分子の斥け方の多様性の問題である。エネルギーよりもエントロピーの問題であるということもできる。ある圧力で、結晶と液体が二相共存しているとき、その二相の間では、低密度の液体のほうがエントロピーが大きい。しかし、結晶と同密度の液体を考えれば、結晶のほうがエントロピーが大きい。

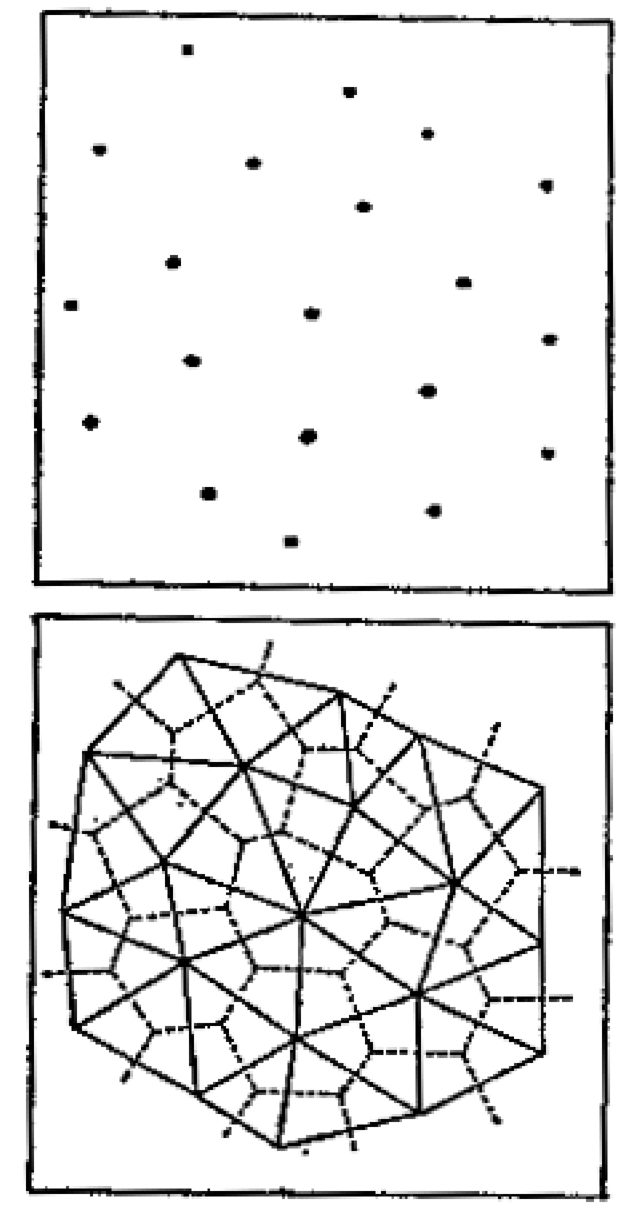
現実の結晶では実際に引力が働いている。どの結晶構造が選ばれるかについてはエネルギーの議論は重要である。金属、共有結合、イオン結晶等々、物質の種類により結合の機構も異るが、剛体球模型は主として、アルゴンのような球形の不活性気体分子の結晶化について一番よくあてはまる。

結晶は本当に安定か？

結晶秩序の存在を前提として、候補となるいくつかの結晶構造についてエネルギーを比較し、その中で一番安定な構造を選ぶこと、それが、微小振動や微小変形に対して安定であることを確かめるということはできる。しかし与えられた相互作用に対して「ありとあらゆる配置の中で、結晶が本当に一番安定であるのか？」という原理的問いに答えることは極めて難しい。いろいろと成功を収めている固体物理学の現状も、主として結晶の安定性を前提としての話である。

五分子系の場合でも、正方形を底面とするピラミッド状の配置と、二つの合同な四面体を、対応する面と面で貼り合わせたような配置の二つについて、それぞれ安定な配置を探し、さらに両者を比較

しなければ最安定配置を決められない。この場合を二種類の配置と数えるならば、不活性気体に働く分子間力として典型的な二体力であるレナード・ジョーンズ相互作用の場合、一三粒子系での配置は、九八八種類にも達する。そして、有限系での最安定構造は無限系での最安定構造である結晶とは異りうる。この問題については微粒子の形の項で述べる。



第11図　ボロノイ(V)分割とデロウニイ(D)網目.
------V　——D

多面体分割と網目——VD描像(9)

点配置一般を特徴づけようという立場で、V（Voronoi ボロノイ）分割、D（Delaunay デロウニイ）網目の方法について紹介する。

まず、二次元の場合で概念を理解しよう。平面内の分子配置が与えられているものとする。単に、平面内の一般の点と区別するために分子と呼んでいるだけで、実際には何の配置でもよい。たとえば、動物の群れの瞬間的な個体配置でも、病院の配置でも、星の配置でもかまわない。平面上のすべての点を最も近い分子に割り当てると、平面は分子数だけの凸多角形領域に、一義的に分割される。各多角形を各分子のV多角形という。三次元の場合だと凸多面体分割であり、V多面体という。固体物理

学でのウィグナー・ザイツ・セルあるいは原子多面体は、この考えを結晶に適用したものである。二つの分子は、もしそれらのV多角形が一辺を共有して接していれば、互いに隣接分子であるという。世界地図を見ると、二国間の国境線の端は、三国共有点であることが普通であるが、アメリカで、ユタ、アリゾナ、ニューメキシコ、コロラドの四州の場合は、例外的に四州共有型になっているようだ。V分割では、接近した四分子が同一円周上にあるとき、このような縮重が起るが、分子を微小に移動させてやればこの状況は解消するので、二次元ではすべて三国共有型、三次元では四国共有型であるとして話を進める。

V分割での三国共有点は、当該三分子から等距離にあり、三分子の作る三角形の外心になっている。重要な性質は、この外接円内部には分子は存在しないことである。もしあるとすれば、外心はこの分子のV多角形に属していて、前の三分子は権利がないはずである。

すべての隣接分子対を線分で結ぶと、網目が形成され、平面は三角形領域に分割し尽くされる。これらをD（デロウニイ）網目、D三角形と呼ぶ。D三角形の外心がV分割の三国共有点であり、V多角形の頂点である。D網目はV分割と共役な関係、双対的な関係にあるので、今述べている観点全体を一括してVD描像と呼ぶことにする。

位相幾何学的特徴

VD描像で何が判るかというと、V多角形の面積の分布は密度のゆらぎに関係しているし、隣接分

子間距離の分布は二体分布関数に似た情報をもっている。しかし、連続変数で与えられた座標に処理を行って、せっかくつながりという性質を抜き出したのだから、連続量はひとまずおいて、網目や多角形分割、多面体分割の、位相幾何学的というか、グラフ理論的特徴づけを確立したいものである。

分子数が無限に大きい極限では、分子配置の表面効果を無視できる。この極限では、D三角形の個数は分子数の二倍に等しい。各分子は平均として、ちょうど六個の隣接分子をもっている。これは三角形の内角和が二直角であるという平面の幾何学的性質に基づく法則性である。三次元でD三角形に対応するのは、D四面体であるが、その内立体角和については対応する保存則はなく、隣接分子数の平均値は分子配置に依存している。

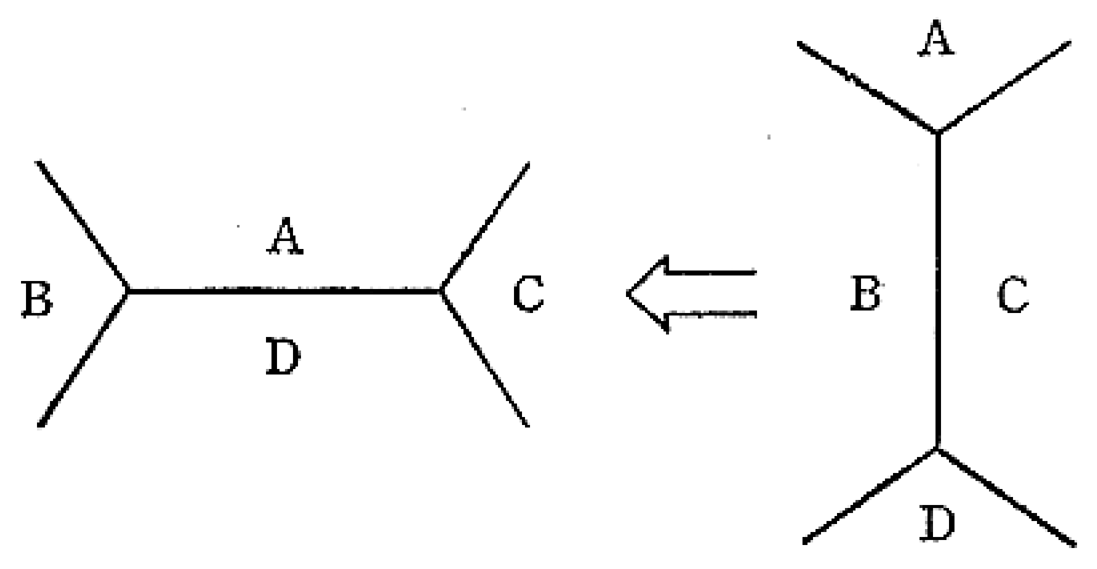
このように、二次元では平均隣接分子数は六と決っているので、つながり具合を特徴づける一番簡単な量は、隣接分子数のゆらぎや分布である。三次元では、立体幾何学の定理不在のために見通しが極めて悪くなっているが、逆に、平均隣接分子数自体が重要な情報を含んでいると考えることもできる。

多面体の分類

一つの多面体の面数（F）、稜数（E）、頂点数（V）の間には、オイラーの関係式$F-E+V=2$があるが、すべての頂点が三国共有型である単純多面体では$V=2F-4, E=3V/2$になっている。面数Fの多面体、F面体を分類する方法として、K角形面の数の組$\{F_k\}$（$k \geqq 3$, $\sum_k F_k=F$）がよ

く使われ、（$F_3F_4F_5\cdots$）という指標で表示される。四面体は（4）、三角柱は(23)、立方体は(06)という具合である。さらに面の配置を考慮すると、七面体(2221)では右手系と左手系という意味での立体異性体があり、八面体(2222)では、それに加えてまったく形の似ていない本質的な異性体もある。一二面体は五〇〇万種以上、単純多面体に限っても七六〇〇種以上と多面体の多様性はすさまじい。

分子配置ごとにV多面体分割は一義的になされる。この指標で分類した統計がフィニイによってなされ、この方法はしばしば用いられている。



第12図　組みかえ。

多面体間の、位相幾何学的形の近さについて、次のように考えることができる。単純F面体の頂点が一つだけ除かれるように平面で切り落とすと、三角形面が一つ増えて（F＋1）面体になり、切られた三つの面では辺が一つずつ増える。この操作を切り落としと呼ぼう。次に、三つの面ABCが一頂点を共有し、BCDも別の頂点を共有しているものとする。変形が起って、ABDとACDがそれぞれ頂点を共有するようになったとする。言い換えると、隣接していたBCが離れ、離れていたADが隣接するようになる変形である。この操作を組みかえと呼ぼう。この場合は相変らずF面体であるが、AとDでは辺が増し、BとCでは減っている。このように切り落としと組みかえによって変形するとして、ある多面体から別の多面体に、最低何回の操作で移行できるかを基にし

て、位相幾何学的な形の近さを定義できる。

VD描像でみた結晶、液体、気体

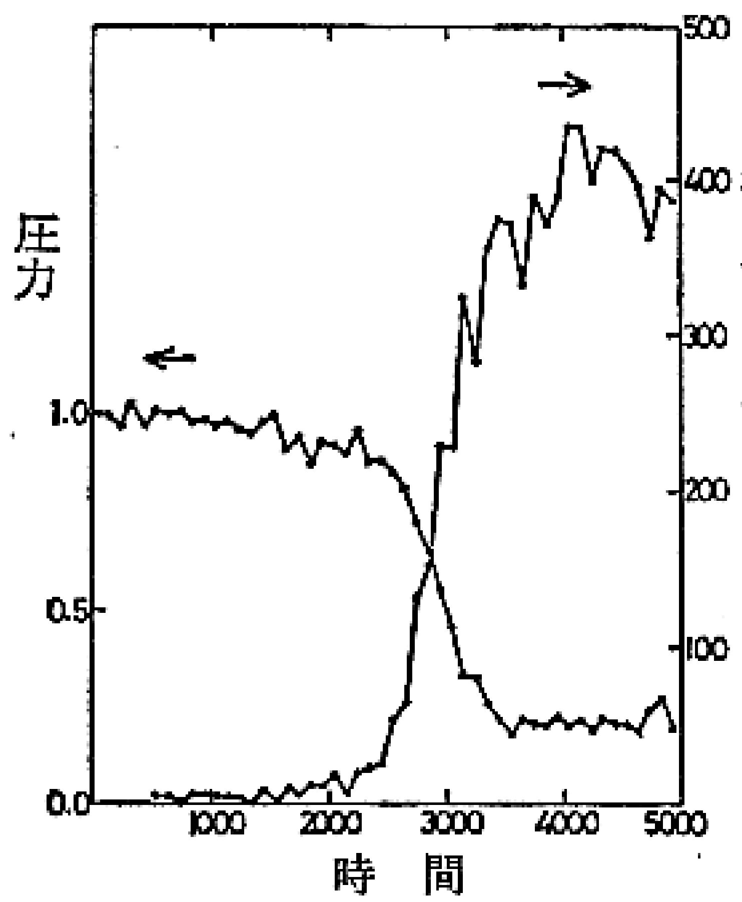
完全結晶では、どの分子も合同なV多面体をもつ、重要な三次元結晶について調べると、単純立方格子では立方体であるが、八国共有型縮重がある。面心立方格子では菱形一二面体であるが、六国共有型縮重がある。一方向に均等に微小圧縮するなどで縮重を除くと、これらはいずれも、体心立方格子のV多面体と位相幾何学的に等しいケルヴィン一四面体になる。この多面体については、プラトー問題の項ですでにふれた。この隣接分子数一四という値は、微小変形に対しては極小値である。しかし、合金のように二種類以上の分子が混ったときには、平均隣接分子数が一四以下の構造もあることが判っている。このような構造から乱れたものと、平均隣接分子数一四の結晶から乱れたものとをどう区別できるかは今後の課題である。

縮重のある結晶で、熱振動による分子変位が起ると、何種類もの多面体が現われるが、微小変位の極限では、単純立方格子も、面心立方格子も、平均隣接分子数は一四である。

液体や気体でのV多面体は一〇面体から二〇面体くらいの非常に多種類に分布するが、平均隣接分子数は乱れとともに増す。理想気体についてはメイジャリングが求めた一五・五四が厳密解である。なお四価共有結合結晶であるダイヤモンド格子の平均隣接分子数は二〇である。

計算機実験における結晶化(10)

ある計算機実験の際に、過冷却液体の圧力が急激に減少する現象が見られた。全粒子の座標の表を眺めてみても、何が起ったのか見当がつかない。そこでVD解析が威力を発揮する。圧力降下と時を同じくして、結晶秩序に固有のケルヴィン一四面体や、それに近いV多面体が急増しているからである。特に、熱振動の周期程度の時間についての各分子の平均座標についてVD解析を行うと、どんな点を中心に振動しているかが判り、いっそう秩序を捉えやすい。要するに起ったことは結晶化である。ゆらぎとして生じた結晶核が成長してゆき、七〇~八〇分子に達すると急成長する。このような様子を観察することができる。



第13図　計算機実験での結晶化.

ここで注意すべきことの第一は、通常の定義である周期的粒子配置は、無限に大きい完全結晶を念頭においたものであり、微小な結晶の芽に対して、どう定義を拡張できるかが問題だということである。V多面体は、ある分子とその周囲一皮程度の、あわせて十数個程度に着目して、局所的に結晶秩序を定義できることである。第二に、この局所定義によって、全系を結晶的部分と非結晶的部分に塗り分けることが可能だということである。計算機実験で二相共存が実現していて、各相ごとに物理量の値が異っていても、

それらを塗り分け、別々に統計処理をしない限り、混ぜ合わせた平均が見えるだけである。V多面体による結晶の局所秩序が塗り分けを可能にしている。塗り分けが可能なためには、結晶と非結晶の間の相転移が本質的に不連続なものであり、一次転移であることが効いている。連続的な二次転移では界面を定義できず、塗り分けは不可能であろう。

類似の問題

V解析以外にも、多面体状の空間分割の問題はいろいろある。一七二七年のヘールズの著書『植物計量学』(11)には、「新鮮なエンドウ豆を鍋に入れて、高圧の下でふやかしたり熱したりしたところ、豆は空隙を充たそうとして多面体状に変形した」とあり、正一二面体状のものが多かったという。広い意味でこの流れに沿う研究は鉛の散弾、石鹸泡、植物の細胞等についてなされ、バナールの液体構造論とその後の発展につながっている。また、多数の核から成長した結晶が空間を埋めつくした時の結晶粒も、類似の空間分割を示すし、動物のなわばりも似ている。

これら似た問題の間の相違を認識しておく必要がある。豆や散弾では隙間を許しているであろう。界面は平面か曲面かということも重要である。平面に限れば四面ないと閉空間を作れないが、曲面を許せば球のような一面体も存在する。また凸多面体の場合には、二つの領域の境界面は一つながりのはずであるが、それ以外の多面体では複数の面で隣接できる。界面を平面に限ったとしても、凸多面体だけかどうか？　単純多面体だけかどうか？　V分割では、さらに、中心をもつ分割になっており、

かなり制限の厳しい分割である。このような相違により、平均面数等のもつ意味も異ってくる。

次元と形（I）

長さlの線分があるとする。これを適当に切り刻み、いくつかの線分に分ける。これらを再配列させて元の長さlの線分に再構成するのには、頭をわずらわせる必要はない。同様に、二次元の図形を細分して、ジグソーパズルのように再配列しようとする。この場合には、原配置以外の並べ方があるとすれば、むしろ細分法が特殊な場合だといえよう。仮に、多角形に細分するという条件をつけて、同じ長さの辺をまずそろえて並べるとしても、角度が三六〇度で閉じるという制限を到るところで考慮せねばならず、かなり厳しい。総面積の保証などは、ほとんど何の支えにもなってくれない。三次元問題ともなればなおさらである。

角度だけについていうならば、平面角を三六〇度で閉じさせるのは、一次元の線分つめかえと同様である。平面角はたんにスカラー量にすぎないのであるから。しかし、立体角になると話は根本的に異る。立体角は大きさだけでは表わせない。「形」の性格をもっている。われわれの数量感覚は、ほとんどスカラー量に基づいている。ベクトル演算やテンソル演算で、もう少し複雑なことをやっているが、幾何学的な事柄に関わる確率論、統計論についての感覚はあやしい。

たとえば、バートランドの逆理というものがある。「単位円にランダムに引いた弦の長さが、内接正三角形の辺の長さ（$\sqrt{3}$）よりも長い確率」は、①直径上に弦の中点を選べば½　②円周上に弦の

端を選べば$1/3$　③円内に弦の中点を選べば$1/4$　④直径の一端と、その他端における接線上に選んだ一点を結べば0というように千差万別の答を導ける。「ランダムに引いた弦」という表現が、問題を完全に設定していないための混乱であって、本当の逆理ではない。上記の各々は、互いに変数変換を正しく行って重みをつければ、決して矛盾していないが、ランダムという言葉を安易に使うことへの反省を促している。

一変数に限っても、方向についての統計処理では、角度変数の周期性が問題になる。二次元の場合、ある規準の方向を決め角度を測る向きを決めても、三〇度の方向と六〇度の方向の平均は四五度であると一義的には答えられない。分布がぐるりと全方向にはおよばず、ほぼ一方向に偏っているような場合は問題なかろうが、一般的にいえば二二五度も同資格である。また正n角形の頂点のn方向のように、非常に対称性がよいときには、平均値は決まらなくなってしまう。このようなことは、相加的な量についての通常の統計ではありえない。季節に関するデータや、一日のうちでの時刻に関するデータも、方向と同様の性質をもつ。ある種の事象が地表上のどことどこで起ったという分布では、立体角について同様のことが問題になる。われわれには、まだ「形」の問題の処理方法についての充分な備えがない。

次元と形（II）

二次元では、正n角形は任意のnに対して存在するが、ケプラーが最初に論じたように、ただ一種類の合同な正n角形で平面を埋めつくすことができるのは、nが三、四、六のときのみである。三次元の正n面体は、nが四、六、八、一二、二〇の五種類しかないということは、二〇〇〇年以上も前から知られていた。『ティマイオス』で正多面体を基にした世界観を論じているプラトンに因み、プラトニック立体（ソリッド）と呼ばれている。これらのうち、正四面体は正四面体自身と、正六面体は正八面体と正一二面体は正二〇面体と、それぞれごとに、面と頂点の立場を逆転させたものなので、お互いに共役である。これら五種類しかない正多面体の中でも、とりわけ対称性の高い正一二面体と正二〇面体は、七二度回転に関わる五回対称性をもち、二次元の場合の正五角形同様、結晶秩序に発展できない。

一個の球のまわりに接触させて、等大球をできるだけ多数配置させようとすれば、一二個が限度である。三次元最稠密格子である面心立方格子や、六方稠密格子では、一二個の隣接粒子が、身動きできないように接触しあって、中心球と接している。このときの一二個の方向の選び方は、正一二面体の一二個の面心方向、いいかえると正二〇面体の一二個の頂点方向と比べれば、当然対称性の落ちる一二方向である。

このように、三次元では結晶秩序という長距離の秩序を維持しようとすれば、短距離秩序の対称性は譲歩しなければならない。二次元最稠密格子である三角格子の隣接六方向が一周の六分角であり、長距離秩序と短距離秩序が調和しているのとは異る。しかし、三次元で結晶秩序と相容れない短距離秩序は無限系では譲歩しているものの、次項で示すように微粒子のような有限系では、結晶秩序に打ち克って、いろいろな系で実現する。

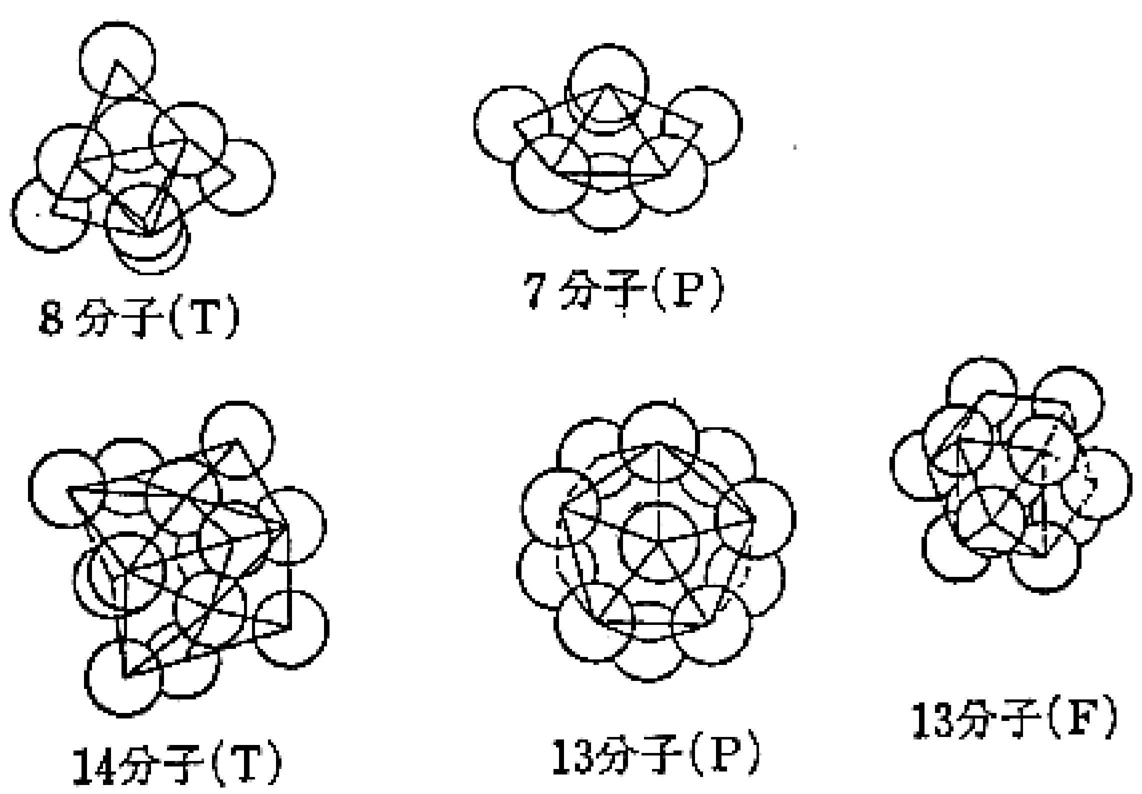
結晶とは異る構造の微粒子

径一〇〇Aほどの銀微粒子では正五角形の輪郭をもつものが発見されている。これは、結晶と同じ面心立方格子の構造をもつ正四面体状のものが、五個集まってわずかに変形して閉じた形と解釈されている。正五角形の輪郭をもつ方向と直角の方向から見ると、ソロバン玉のような形になっている。つまり、七個の頂点と一〇個の三角形面をもつ多面体である。ミクロな構造としては、わずかに歪んだ結晶を貼り合わせたようなものであり、歪みのエネルギー、界面のエネルギー、表面のエネルギーの総合では、このような多重双晶が、単結晶よりも安定なのであろう。このようにマクロな概念で説明されている。

ホーアたちは、レナード・ジョーンズ二体力の働く少数粒子系について、いろいろな配置のポテンシャル・エネルギーを、かなり系統的に丹念に調べた(12)。七粒子の場合、五粒子を正五角形状に配し、その表と裏の中央に一個ずつ付けた構造が安定になり、銀微粒子の場合に似た形になる。これは七粒子ができるだけたくさん四面体を作ろうとした配置であり、結晶とは異る構造とみなすべきである。この形の片側の各面に一個ずつ付着して四面体を形成してゆき、八～一二個の系の安定形が説明できる。一三個目は正二〇面体になるが、七粒子の場合からの同じ系列の上で理解することができる。一三粒子系の中央の分子は、表面の一二個すべてと接しているが、次の一個は、もう接することができない。表面分子どうしの距離は、中央分子と表面分子の距離のほぼ一・〇五倍であり、多少がたついているが、隙間を集中させても、次の一個分の席はできない。中心から見て、二層目を作って行く

ことになる。$\frac{1}{3}(10n^3+15n^2+11n+3)$ で表わされる（13, 55, 147, 309, 561…）のときに正二〇面体的に閉じるが、この系列の配置を五角形系列の配置と名づけておく。

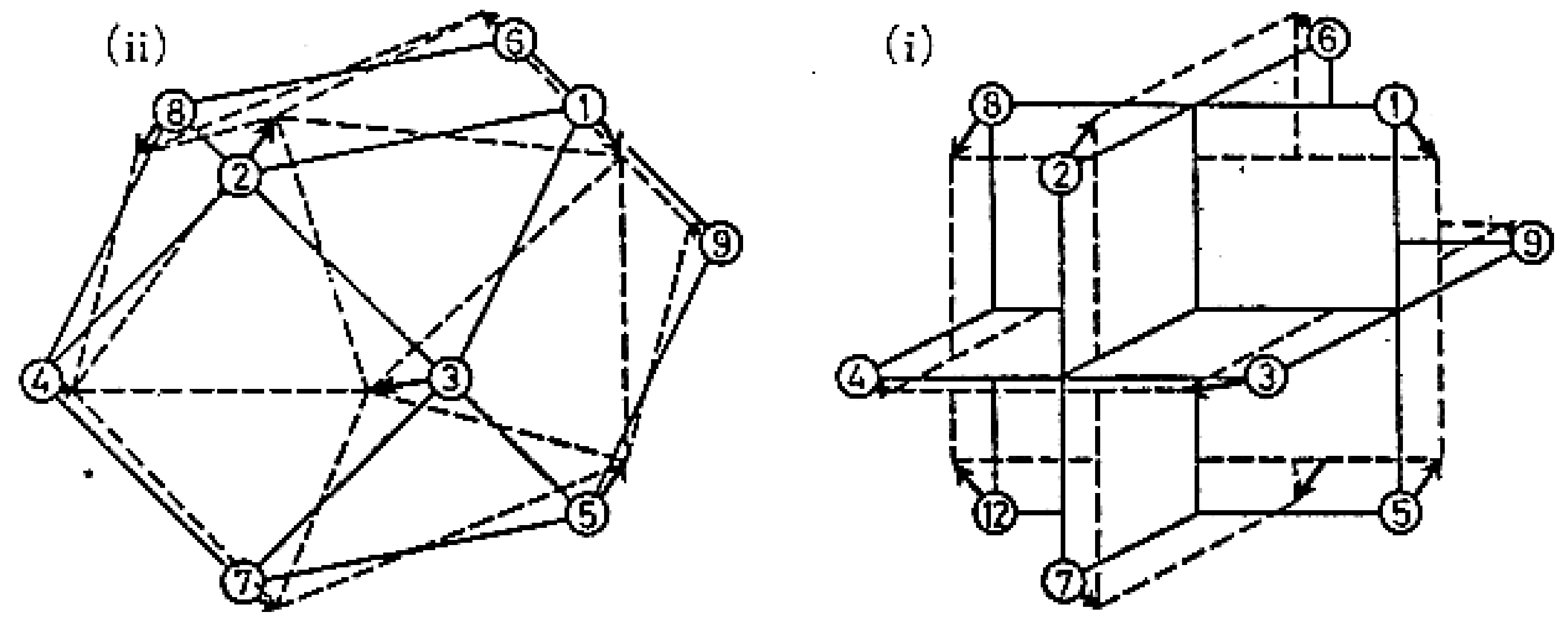
一方、正四面体の各面に同じ正四面体を配してできる八分子の星形四面体（第14図左上）を作り、次にはその六つの谷折りの陵の所に付けて行き、一四分子で閉じさせる……。この系列を四面体系列の配置と名づける。



第14図　有限分子系の構造。

その他に、結晶の場合と同じ構造の面心立方系列の配置がある。五角形系列P、四面体系列T、面心立方系列Fのそれぞれの配置の安定性を比較すると、分子数二四～三二でTが安定な他は、数百分子まではPが安定である。それより大きくなってやっとFが安定になる。

このように、有限系では結晶とは異る構造が安定である。その理由を一言でいえば、充塡の効率である。一三個の等大球があるとする。中心に一個据え、他の一二個がこれに接しながら取り囲む場合を考える。面心立方配置では外側の球どうしも接していて、どれ一つとして身動きできない。ところが正二〇面体配置では、表面球の間に隙間がある。不思議に思えるが、全表面球が第15図に示すような集団行動をとると、



第15図　面心立方構造(F)から正二十面体構造(I)への集団行動．
(i)で正方形を黄金比長方形に変形．(ii)表面分子の隣接分子数が増える．

ゆるんできてまさに隙間がひねり出される。面心立方配置での各表面球は、四つの表面球と接しているが、正二〇面体では、五個の表面球が少し離れて等距離にある。アルゴン数原子のクラスターやウイルスの集合などでこのような非結晶構造や正二〇面体構造が観測されている。

ホーアは、振動スペクトルも求めて有限温度での議論もしている。他に計算機実験もあるが、やはり数百粒子までは非結晶的な五角形系列の配置が安定である。

電子にとっては結晶構造と非結晶構造のどちらが居心地が良いだろうか。著者は簡単な模型で量子力学的な計算を行った。結果は複雑な条件に支配されていてどの物質でどういう形の微粒子になるという予言は不可能だが、電子が形の問題にどう関わるかについて、二つの傾向の争いになっていることは一般的にはいえる(13)。

幾何学的に対称性の高い形では、縮重度の高い電子準位がありうる。もし電子のフェルミ準位が、縮重度の高い準位に来たとして、電子数がこの準位をつめきることができなければ、その状況に応じて縮重度の下った歪んだ形になる。いわゆるヤーン・テラー効果である。もし、電子間のクーロン相互作用が重要な物質の場合には、フェルミ準位での高い縮重を利用して、磁気を帯びる傾向が生じる。これはフント的傾向と名づけることができる。この場合は形としては対称性が高いままである。対称のよい形で磁気を帯びるフント的傾向と、歪んだ形になるヤーン・テラー的傾向とが相容れずに争っていることになる。